MA1 – domácí úkol 6 – řešení

(1.) $\int x^2 \ln(1-x^3)\,dx$

(i) existence primitivní funkce (neboli neurčitého integrálu) k funkci $f(x) = x^2\ln(1-x^3)$:
funkce $f(x) = x^2\ln(1-x^3)$ je definovaná a spojitá na intervalu $(-\infty, 1)$ $\left(= \{x\in\mathbb{R};\ 1-x^3>0\}\right)$, tedy daný neurčitý integrál existuje na intervalu $(-\infty,1)$ (existenční věta)

(ii) výpočet:
„vidíme", že $(1-x^3)' = -3x^2$, což vede k užití 1VS pro výpočet daného integrálu:

$$\int x^2 \ln(1-x^3)\,dx = -\frac{1}{3}\int(-3x^2)\ln(1-x^3)\,dx \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} 1-x^3 = t \\ -3x^2dx = dt \end{array}\right|$$

$$= -\frac{1}{3}\int \ln t\,dt = \left| \begin{array}{l} u'=1,\ u=t \\ v=\ln t,\ v'=\frac{1}{t} \end{array}\right| =$$

a dále užijeme integraci per partes

$$= -\frac{1}{3}\left(t\cdot\ln t - \int t\cdot\frac{1}{t}\,dt\right) = -\frac{1}{3}\left(t\ln t - t\right) + C =$$

$$= \underline{-\frac{1}{3}(1-x^3)\left(\ln(1-x^3) - 1\right) + C}, \quad \underline{x\in(-\infty,1)}$$

(A připomenutí 1VS pro tento „přepod":

$$\int \ln(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} g(x)=t \\ g'(x)dx=dt \end{array}\right| = \int \ln t\,dt = \dots$$

„zde máme": $\int \ln(1-x^3)\cdot(1-x^3)'dx = \int \ln(1-x^3)(-3x^2)\,dx$)

(2.) $\int \frac{1}{x}\sqrt{1-\ln x}\,dx$

(i) existence primitivní funkce:

$f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{1-\ln x}$ je definována pro $x\in(0,+\infty)$ takové, že $1-\ln x\geq 0$, což je interval $(0,e\rangle$ ($\ln x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq e$), primitivní funkci budeme hledat v intervalu otevřeném $(0,e)$ (dle „naší" dohody primitivní funkce uvažujeme v intervalech otevřených pro jednoduchost), neboť zde $f(x)$ je spojitá a tedy zde má primitivní funkci.

(ii) výpočet: opět ke užití 1VS, neboť:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{1-\ln x}\,dx = -\int \sqrt{1-\ln x}\,(1-\ln x)'\,dx = \left|\begin{array}{l} 1-\ln x=t \\ -\frac{1}{x}dx=dt\end{array}\right|$$

$$= -\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{2}{3}t^{3/2}+c = -\frac{2}{3}\sqrt{(1-\ln x)^3}+C,$$

$x\in(0,e)$

(3.) $\int \frac{\cos x}{\sin x+3}\,dx$, $x\in R$

(i) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x+3}$ je spojitá v R, tedy primitivní funkce existuje v R

(ii) výpočet - opět dle 1VS (spec. případ 1VS: „$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\ln|g(x)|+C$")

$$\int \frac{\cos x}{\sin x+3}\,dx = \int \frac{(\sin x+3)'}{\sin x+3}\,dx = \ln(\sin x+3)+C,\ x\in R$$

($\sin x+3>0$ v R)

(v 1VS: $\left|\begin{array}{l}\sin x+3=t\\ \cos x\,dx=dt\end{array}\right|$)

(4.) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx$

(i) integrál existuje v intervalech $(-\infty,0)$ a v $(0,+\infty)$, neboť zde je daná funkce $f(x)=\frac{1}{x^3}\,e^{\frac{1}{x}}$ definovaná a spojitá;

(ii) výpočet:
„zkusíme" 1VS : $\frac{1}{x}=t$, $-\frac{1}{x^2}dx=dt$, pak to „vyjde":

$$\int \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx = -\int \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = -\int \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} \frac{1}{x}=t \\ -\frac{1}{x^2}dx=dt \end{matrix}\right| = -\int t e^t\,dt = \left|\begin{matrix} u'=e^t, & u=e^t \\ v=t, & v'=1 \end{matrix}\right| =$$

dále per partes

$$= -\left(te^t-\int e^t dt\right) = e^t(1-t)+c = \underline{e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)+c}$$

$\underline{x\in(-\infty,0),\ x\in(0,+\infty)}$

(5.) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+1}dx = \int \frac{1}{(2x)^2+1}dx = \underline{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)+c,\ x\in R}$

(i) $x\in R$, neboť $f(x)=\frac{1}{4x^2+1}$ je spojitá v R

(ii) výpočet byl „jednoduchý", užitím „skorotabulky":

$$\int \frac{1}{(ax)^2+1}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(ax)+c,\ x\in R$$

$a\neq 0$

(6.) $$\int \frac{x+5}{(x+3)(x^2+4x+5)}\,dx$$

(i) existence: funkce $f(x)=\dfrac{x+5}{(x+3)(x^2+4x+5)}$ je definovaná a spojitá v intervalech $(-\infty,-3)$ a $(-3,+\infty)$, zde tedy k ní existuje funkce primitivní

(ii) výpočet: funkce $f(x)=\dfrac{x+5}{(x+3)(x^2+4x+5)}$ je funkce racionální, ryze lomená, tedy rozložme $f(x)$ na jednoduché (parciální) zlomky a ty pak integrujme (dle „receptů"):

$$\frac{x+5}{(x+3)(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}, \quad x \neq -3$$

pak
$$x+5 = A(x^2+4x+5) + (Bx+C)(x+3)$$
$$x+5 = (A+B)x^2 + (4A+3B+C)x + 5A+3C.$$

tedy dostáváme soustavu rovnic pro A, B, C:

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ 4A+3B+C &= 1 \\ 5A+3C &= 5 \end{aligned}, \quad \text{a odtud: } \quad \underline{A=1}, \ \underline{B=-1}, \ \underline{C=0}$$

Tedy, $$\int \frac{x+5}{(x+3)(x^2+4x+5)}\,dx = \int \frac{1}{x+3}\,dx - \int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{x+3}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx + 2\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

$$= \underline{\ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + 2\,\mathrm{arctg}\,(x+2) + C}$$

Poznámka: $$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\,dx \underset{\text{(tedy)}}{=} \ln(x^2+4x+5)+C$$

a $\int \frac{1}{x+3}\,dx$, $\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx$ – užijeme „skoro" tabulek:

$\int \frac{1}{x}\,dx$, $x \to (x+3)$, $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$, $x \longrightarrow (x+2)$

7. $$\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}\, dx \quad ;$$

(i) existence: integrál existuje v R, neboť fce $f(x) = \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$ je definovaná a spojitá v R;

(ii) výpočet: a) vyjádříme-li $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, pak

$$\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{3 - \sin^2 x} \cdot \cos x\, dx =$$

$$= \int \frac{\sin x}{3 - \sin^2 x} \cdot (\sin x)' dx \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{3 - t^2}\, dt =$$

$$\binom{\text{a opět}}{1VS} = \left| \begin{array}{l} 3 - t^2 = y \\ -2t\,dt = dy \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{y}\, dy = \underset{(y>0)}{-\frac{1}{2} \ln y + C} = -\frac{1}{2} \ln(3 - t^2) + C =$$

$$= \underline{-\frac{1}{2} \ln(3 - \sin^2 x) + C, \quad x \in R} \quad ;$$

ale pokud nás „napadne", že $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot \cos x$, lze substituci udělat „najednou":

$$\int \frac{\sin x \cos x}{3 - \sin^2 x}\, dx \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} 3 - \sin^2 x = t \\ -2\sin x \cos x\, dx = dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \underset{(t>0)}{-\frac{1}{2} \ln t + C} = \underline{-\frac{1}{2} \ln(3 - \sin^2 x) + C, \ x \in R}$$

b) podobně lze naopak vyjádřit $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ a pak:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x \cos x}{2 + \cos^2 x}\, dx \quad ;$$

Dále, opět užitím 1VS dostaneme:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{2+\cos^2 x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\cos x \sin x}{2+\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} 2+\cos^2 x = t \\ 2\cos x(-\sin x)\,dx = dt \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \underset{(t>0)}{-\frac{1}{2}\ln t + c} = \underline{-\frac{1}{2}\ln(2+\cos^2 x)+c,\ x\in R}$$

(a analogicky k a) lze místo uvedené substituce udělat „formálněji" substituce dvě („za sebou") 1) $\cos x = t$, 2) $2+t^2=y$:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{2+\cos^2 x}\,dx \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{array} \right| = -\int \frac{t}{2+t^2}\,dt \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} 2+t^2 = y \\ 2t\,dt = dy \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\ln(2+\cos^2 x)+c,\ x\in R$$

c) a navíc, možná si uvědomíte, že už také

$$(2\sin^2 x + 3\cos^2 x)' = 4.\sin x.\cos x + 6.\cos x(-\sin x) = -2\sin x.\cos x$$

lze „přímo" 1VS:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} 2\sin^2 x + 3\cos^2 x = t \\ -2\sin x \cos x\,dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln t + c = \underline{-\frac{1}{2}\ln(2\sin^2 x + 3\cos^2 x)+c,\ x\in R}$$

(8.) $$\int \frac{\ln x}{x\,(1+\ln^4 x)}\,dx$$

(i) integrál existuje v intervalu $(0,+\infty)$ - zde je funkce $f(x)=\dfrac{\ln x}{x\,(1+\ln^4 x)}$ definovaná a spojitá;

(ii) výpočet:
opět užijeme 1VS - zde integrál „typu" $\int f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$:

$$\int \frac{\ln x}{x\,(1+\ln^4 x)}\,dx = \left|\begin{array}{l}\ln x = t\\ \frac{1}{x}dx = dt\end{array}\right| = \int \frac{t}{1+t^4}\,dt \underset{1VS}{=}$$

$$= \left|\begin{array}{l}t^2 = y\\ 2t\,dt = dy\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, y + C =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,(\ln^2 x)) + C}$$

nebo lze „přímo" užít 1VS se substitucí $\ln^2 x = t$:

$$\int \frac{\ln x}{1+\ln^4 x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left|\begin{array}{l}\ln^2 x = t\\ 2\ln x\,dx = dt\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, t + C = \underline{\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,(\ln^2 x) + C}$$

$$\int \arcsin^2 x \, dx$$

(i) <u>existence</u>: integrál existuje v intervalu $(-1,1)$, funkce $f(x) = \arcsin^2 x$ je definovaná a spojitá v intervalu $\langle -1,1 \rangle$, pro primitivní funkci uvažujeme otevřený interval $(-1,1)$;

(ii) <u>výpočet</u>: a) řešme dle 2VS : $\arcsin x = t$

$$\int\limits_{x\in(-1,1)} \arcsin^2 x \, dx = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = t \\ x = \sin t, \\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ dx = \cos t \, dt \end{array} \right| = \int t^2 \cos t \, dt \underset{2x \text{ per partes}}{=}$$

$$= \left| \begin{array}{l} u' = \cos t, \; u = \sin t \\ v = t^2, \; v' = 2t \end{array} \right| = t^2 \sin t - 2\int t \sin t \, dt = \left| \begin{array}{l} u' = \sin t, \; u = -\cos t \\ v = t, \; v' = 1 \end{array} \right|$$

$$= t^2 \sin t - 2\left(-t\cos t + \int \cos t \, dt\right) = t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t + c$$

$$= \underline{x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + c, \quad x \in (-1,1)};$$

kde jsme užili : (1) $\sin(\arcsin x) = x$

(2) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} \overset{(1)}{=} \sqrt{1-x^2}$

neboť pro $x \in (-1,1)$ je $\arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

a tedy $\cos(\arcsin x) > 0$

b) můžeme integrál počítat také od „začátku" integrace per partes – uvažujme

$$\int \arcsin^2 x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin^2 x \, dx \;:$$

$$\int \arcsin^2 x \, dx \underset{pp}{=} \left| \begin{array}{ll} u' = 1, & u = x \\ v = \arcsin^2 x, & v' = 2 \arcsin x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| =$$

$$= x \arcsin^2 x - 2 \int x \cdot \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \underset{pp}{\overset{(*)}{=}} \left| \begin{array}{ll} u' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & u = -\sqrt{1-x^2} \\ v = \arcsin x, & v' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right|$$

$$= x \arcsin^2 x - 2 \left(-\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \right) =$$

$$= \underline{x \arcsin^2 x + 2 \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + c, \quad x \in (-1,1)}$$

(*) Výpočet integrálu $\int x \cdot \arcsin x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$:

napišme „lépe": $\int \arcsin x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$, a nyní lze opět integrovat per partes, neboť „umíme" najít k funkci $u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ primitivní $u(x) = \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ dle 1VS:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \, dx \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ -2x \, dx = dt \end{array} \right| = -\int \frac{1}{2\sqrt{t}} \, dt =$$

$$= -\sqrt{t} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

(10) $$\int \frac{\sqrt{x}-1}{x(x-2\sqrt{x}+3)}\,dx$$

Funkce $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x(x-2\sqrt{x}+3)}$ je racionální v $\underline{x}$ a $\underline{\sqrt{x}}$, tedy lze užít 2VS se substitucí $\sqrt{x}=t$ a pak můžeme integrovat funkci racionální dle „návodu":

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{x(x-2\sqrt{x}+3)}\,dx \underset{2VS}{=} \left|\begin{array}{c}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2t\,dt\end{array}\right| = \int \frac{t-1}{t^2(t^2-2t+3)}\cdot 2t\,dt =$$

$x\in(0,+\infty)$ $\qquad$ $t\in(0,+\infty)$

$$= \int \frac{2(t-1)}{t(t^2-2t+3)}\,dt \underset{(*)}{=} \frac{2}{3}\left(-\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{t+1}{t^2-2t+3}\,dt\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\int -\frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{2t-2}{t^2-2t+3}\,dt + 2\int \frac{1}{(t-1)^2+2}\,dt\right) \underset{(**)}{=}$$

$$= -\frac{2}{3}\ln t + \frac{1}{3}\ln(t^2-2t+3) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\ln(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\ln(x-2\sqrt{x}+3) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}}\right) + C, \quad x\in(0,+\infty)$$

(*) rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{2(t-1)}{t(t^2-2t+3)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2-2t+3},$$

tj. $2(t-1) = A(t^2-2t+3) + Bt^2 + Ct$

dostaneme soustavu

$$\left.\begin{array}{l} A+B = 0\\ -2A + C = 2\\ 3A = -2 \end{array}\right\},$$

tj. $A=-\frac{2}{3}$, $B=\frac{2}{3}$, $C=\frac{2}{3}$

(**) $$\int \frac{1}{(t-1)^2+2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) + c$$ („skoro" tabulkové)